LIBRIS We know books

Petre Năchilă

Cătălin-Eugen Năchilă

Exerciții și probleme pentru cercurile de matematică

Clasa a VIII-a

Editura Nomina

LIBRIS We know books

CUPRINS

LIBRIS We know books

Capitolul 1
NUMERE ÎNTREGI

1. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $A = (a + b)(a + b + 1)(c + d)(c + d + 1)$. Demonstrați că există $x, y \in \mathbb{Z}$ astfel încât $A = x^2 - y^2$.

2. Fie numărul $x(n) = \sqrt{4^n + 2^{n+1} + m}$, cu $m, n \in \mathbb{N}$. Demonstrați că dacă $x(0)$ și $x(1) \in \mathbb{N}$, atunci $x(n) \in \mathbb{N}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

3. Calculați suma cifrelor numărului $\sqrt[3]{A(n)}$, unde $A(n) = 9 \cdot \underbrace{111...1}_{n}\underbrace{444...4}_{n}\underbrace{777...7}_{n} + 8$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Determinați tripletele de numere naturale (a, b, c), $a \neq 0$, știind că două dintre numere sunt rădăcinile ecuației $ax^2 - bx + c = 0$.

5. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că există $x, y, z, m \in \mathbb{N}^*$ unice, astfel încât:

$x + y + z = 2^{n+2}$ și $xy + yz + zx = 3 \cdot 4^n + 2^n(x + y)$, iar $x^2 + y^2 = mz$.

6. Fie $m, n, p \in \mathbb{Z}$ astfel încât $m + n + p = 0$. Fie $A = m^4 + n^4 + p^2$. Determinați $x \in \mathbb{N}^*$ minim pentru care numărul xA este pătrat perfect.

7. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și fie $A_n = \{x \in \mathbb{N} \mid 4n + 1 \leq x \leq 2n^2 + 1;\ 2 \nmid x\}$. Dacă S_n este suma tuturor elementelor mulțimii A_n, determinați n pentru care $S_n \leq 1000$.

8. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Determinați partea întreagă a numărului $A_n = \dfrac{3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot ... \cdot \left(2^{2^n} + 1\right)}{2^{2^{n+1}}}$.

9. Demonstrați că există o infinitate de perechi de numere naturale nenule (a, b) pentru care $a + 1 \mid b^2$ și $b + 1 \mid a^2$.

10. Determinați numerele prime a, b, c, d, e pentru care avem $a = b + c = d - e$.

11. Fie $A = \left\{ \dfrac{1}{\overline{abcd}} \,\middle|\, \overline{abcd} = x^2 + 3x^2 + 2x,\ x \in \mathbb{N} \right\}$. Determinați suma elementelor mulțimii A.

12. Determinați numărul elementelor și suma modulelor elementelor mulțimii $A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{2000}$, unde $A_n = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^4 = 2^n\}$.

13. Fie a, b, c, d numere naturale impare.

a) Demonstrați că numărul $A = ab + ac + bc$ nu este pătrat perfect.

b) Determinați patru numere a, b, c, d pentru care numărul $B = ab + ac + ad + bc + bd + cd$ este pătrat perfect.

LIBRIS We know books

14. Determinați numărul elementelor mulțimii $A_n = \{9, 99, ..., \underbrace{999...9}_{n}\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, care sunt pătrate perfecte.

15. Fie $A = (2^2 - 1)(3^2 - 1)(4^2 - 1) \cdot ... \cdot (99^2 - 1)$. Determinați 350 numere naturale a, pentru care $\frac{A}{a}$ este pătrat perfect.

16. Se consideră șirul de numere $1 + 3 + 5 + 7$, $5 + 7 + 9 + 11$, $9 + 11 + 13 + 17$, ... Determinați:

a) al 100-lea termen al șirului;

b) suma primilor 100 termeni ai șirului.

17. Determinați restul împărțirii numărului $A = 2^{100} + (2^2)^{100} + (2^3)^{100} + ... + (2^{100})^{100}$ la numărul $a = 2^{100} - 1$.

18. Rezolvați ecuația $(1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot ... \cdot 9!) \cdot (2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot ... \cdot 9^8) = (9!)^n$.

19. Fie $d = (a, b)$ c.m.m.d.c. al numerelor a și b. Determinați perechile (a, b) pentru care $\frac{a+b}{a-b} = \frac{4}{d}$.

20. Determinați două submulțimi disjuncte A, B cu număr maxim de elemente, unde $A, B \subset \{1, 2, 3, ..., 8, 9, 10\}$, astfel încât produsul elementelor din A este egal cu produsul elementelor din B.

21. Știind că numărul $p = a^4 + a^2b^2 + b^4$ este număr prim, unde $a, b \in \mathbb{N}$, determinați $|a + b - 2|$.

22. În șirul infinit de numere 1, 9, 7, 5, 2, ..., fiecare cifră începând cu a cincea este egală cu ultima cifră a sumei precedentelor 4 cifre din șir. Care dintre secvențele (2, 3, 4, 6, 5), (3, 6, 7, 4, 0), (4, 6, 5, 3, 8), (8, 1, 9, 7, 5) apare în șir?

23. Fie numerele naturale $a_0, a_1, a_2, ..., a_{50}$ și suma $S = (-1)^{a_0} + (-1)^{a_1} + (-1)^{a_2} + ... + (-1)^{a_{50}}$. Dacă A este mulțimea valorilor lui S, determinați suma modulelor elementelor mulțimii A.

24. Determinați numărul tripletelor (x, y, z) de numere naturale care îndeplinesc condiția $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx + 3$.

25. Determinați numărul numerelor $\overline{5abc5}$ care sunt pătrate perfecte.

26. Determinați numărul tripletelor de numere impare prime și consecutive.

27. Determinați cel puțin 20 de soluții ale ecuației $x^2 + y^2 = 2[x, y] + 9(x, y)$, unde $x, y \in \mathbb{N}^*$, $x \le 20$, $y \le 20$, $[x, y]$ și (x, y) reprezentând c.m.m.m.c., respectiv c.m.m.d.c. al numerelor x și y.

28. Determinați $a, b, c \in \mathbb{N}$ știind că $3(abc + b + c) = 5(bc + 1)$.

29. Rezolvați în numere naturale ecuația $5 \cdot 2^x = 16 + 2^y$.

30. Determinați numerele prime p pentru care numărul $A = 24p + 1$ este pătrat perfect.

LIBRIS | We know books

31. Determinați numărul submulțimilor $A \subset \{1, 2, 3, ..., 10\}$ de câte trei elemente cu proprietatea că suma pătratelor elementelor este divizibilă cu 4.

32. Suma modulelor a 31 numere întregi distincte este 241. Determinați modulul sumei celor 31 numere.

33. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $n \leq 1000$ pentru care există $a_1, a_2, ..., a_n \in \{-1, 1\}$ astfel încât $a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 0$. Determinați numărul valorilor lui n.

34. Demonstrați că pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$ există numerele naturale a, b, c, n astfel încât $784^m + 28^n = a^2 + b^2 + c^2$.

35. Determinați perechile de numere întregi (m, n) pentru care numărul $p = m^2 + 2mn + m - 4n - 6$ este prim.

36. Determinați valorile numărului $a \in \mathbb{N}^*$ pentru care ecuația $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{a}{[x,y]} = \frac{1}{(x,y)}$ are două soluții în $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

37. Demonstrați că există două numere naturale nenule m și n, pentru care $m - 4n$, $m + 4n$ și m sunt simultan pătrate perfecte.

38. Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ ecuația $x^2 + y^2 + xy = n^2$ are o infinitate de soluții raționale.

39. Dați exemplu de 5 triplete (a, b, c) de numere prime pentru care $ab + 7$, $ac + 7$ și $bc + 7$ sunt numere prime.

40. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ și $A_n = (2^2 - 1)(3^2 - 1)...(n^2 - 1)$. Determinați mulțimea $B = \{n \in \mathbb{N}^* \mid A_n = k^2, k \in \mathbb{N}\}$.

41. Demonstrați că există numerele naturale a, b pentru care numărul $A = a^3 + a^2b - 3ab^2 + b^3$ este număr prim.

42. Determinați numărul de pătrate perfecte din șirul $1 + 2 + 4 + 6$; $3 + 4 + 6 + 8$; $5 + 6 + 8 + 10$; $7 + 8 + 10 + 12$; ... .

43. Fie suma $S_n = (-1)^{a_1} + (-1)^{a_2} + ... + (-1)^{a_n}$, $n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, ..., a_n$ sunt numere naturale. Fie A_n mulțimea valorilor lui S_n, iar B_n suma modulelor elementelor din A_n. Poate fi $\frac{1}{2}B_n + 4$ pătrat perfect?

44. Demonstrați că ecuația $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx + 12$ are o infinitate de soluții în numere întregi.

45. Fie $a_1, a_2, ..., a_{100} \in (0, \infty)$ astfel încât $a_1 + a_2 + ... + a_{100} = m$. Fie suma $S = \frac{a_1}{2m - a_2} + \frac{a_2}{2m - a_3} + ... + \frac{a_{99}}{2m - a_{100}} + \frac{a_{100}}{2m - a_1}$. Demonstrați că $S \notin \mathbb{N}$.

LIBRIS We know books

Capitolul 2
NUMERE REALE

1. Determinați perechile de numere reale (a, b) pentru care $a^2 + a + |b^2 + a| = 0$.

2. Determinați prima cifră după virgulă a numărului $\sqrt{n^2 + n}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Determinați numerele reale a, b știind că avem $\mathrm{card}((a, b) \cap \mathbb{Z}) = 1$ și $a^2 + b^2 -$
$- 0{,}6a + 1{,}4b + 0{,}8 = |b - a - 2|$.

4. Determinați perechile (x, y) de numere naturale pentru care $n = \sqrt{x^2 + 2y + 4}$ și p =
$= \sqrt{y^2 + 4x + 1}$ sunt tot numere naturale.

5. Determinați câtul și restul împărțirii numărului $A = 10101_a$ la numărul $B = 111_a$, unde $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$.

6. Fie $x \in \mathbb{R}$ și fie $y = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$. Determinați valoarea minimă a diferenței $b - a$ dacă $a \leq y \leq b$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

7. Determinați numerele naturale x și y, știind că $\sqrt{x + \dfrac{1}{4}} + \sqrt{y + \dfrac{1}{4}} = 4$.

8. Determinați $n \in \mathbb{N}$ știind că $x \in \mathbb{Z}$, unde $x = \sqrt{\dfrac{3n - 1}{n + 1} - \sqrt{\dfrac{2n - 2}{n + 1}}}$.

9. Fie m, $n \in \mathbb{N}$. Determinați cel puțin 17 perechi (m, n) pentru care $a \in \mathbb{N}$, $a =$
$= \sqrt{1\underbrace{000...0}_{m}2\underbrace{000...0}_{n}}$.

10. Fie x cifră nenulă și fie $a = \dfrac{1}{0,(x)} + \dfrac{1}{0,0(x)} + \dfrac{1}{0,00(x)}$. Știind că $a \in \mathbb{N}^*$, determinați numerele naturale n, pentru care $\sqrt{na} \in \mathbb{N}^*$.

11. Rezolvați inecuația $\dfrac{x^2 + 2x + 4}{x} - \dfrac{12x}{x^2 + 2x + 4} \leq 4$.

12. Fie șirul de numere $a_1, a_2, ..., a_n$ definit prin $a_1 = 1$, $a_2^3 = a_1^3 + 1, \ldots, a_n^3 = a_{n-1}^3 + 1$.
Fie suma $S = \dfrac{1}{a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2} + \dfrac{1}{a_2^2 + a_2a_3 + a_3^2} + \ldots + \dfrac{1}{a_{n-1}^2 + a_{n-1}a_n + a_n^2}$. Determinați n, dacă $S = 10$.

13. Determinați valoarea maximă a expresiei $\dfrac{a}{b}$, unde $a, b \in \mathbb{Z}^*$ și $\dfrac{a - 2}{3} = \dfrac{b}{4}$.

14. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 9$. Determinați cel mai mic număr natural n, pentru care avem $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \leq n$.

15. Se știe că $n^4 - n^2 + 100$ este număr prim și $n \in \mathbb{Z}$. Determinați $n^2 - n + 1$.

16. Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi cu perimetrul 2. Determinați cel mai mic număr natural pentru care $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < n$.

17. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, astfel încât există $x, y, z \in \mathbb{R}$ cu $x + y + z \neq 0$ și $ax + by + cz = 0$, $bx + cy + az = 0$ și $cx + ay + bz = 0$. Determinați $(a^3 + b^3 + c^3) : (abc)$.

18. Fie mulțimea $A = \left\{a \in \mathbb{Z} \middle| \dfrac{\left(a+\sqrt{p}\right)\left(a+1+\sqrt{p}\right)}{a+2+\sqrt{p}} \in \mathbb{Z}\right\}$, unde $p \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$. Determinați p, știind că avem card $A = 2$.

19. Fie $a, b, c \geq 0$. Determinați valorile maxime pentru a, b și c, știind că $a + 2b + c = 7$ și $2a + b - c = 5$.

20. Determinați numerele întregi a, b, c pentru care avem $ab + c = abc - 1$, $bc + a = abc + 1$ și $ac + b = abc - 1$.

21. Determinați numerele reale a, b, știind că $a - b = a^3 - b^3 = a^5 - b^5$.

22. Fie $a_0 = a \in \mathbb{N}^*$, $a_1 = \sqrt{a_0^2 + 2}$, $a_2 = \sqrt{a_1^2 + 2}$, ..., $a_n = \sqrt{a_{n-1}^2 + 2}$. Demonstrați că șirul $(a_n)_{n \geq 0}$ conține o infinitate de termeni raționali.

23. Fie a, b, c numere raționale distincte două câte două. Demonstrați că $A \in \mathbb{Q}$, unde $A = \sqrt{\dfrac{1}{(a-b)^2} + \dfrac{1}{(a-c)^2} + \dfrac{1}{(c-a)^2}}$.

24. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ și $x = a + \dfrac{2}{bc}$, $y = b + \dfrac{2}{ac}$, $z = c + \dfrac{2}{ab}$, astfel încât $bcx + acy + abz = 12$. Determinați $\dfrac{xyz}{abc}$.

25. Demonstrați că există o infinitate de numere $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^*$ pentru care $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$.

26. Demonstrați că există o infinitate de numere $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^*$ pentru care $a^3 + b^3 + c^3 = d^3$.

27. Demonstrați că există $a \in \mathbb{N}$, astfel încât numărul $A = \underbrace{444...4}_{2n \text{ cifre}} + 2 \cdot \underbrace{888...8}_{n \text{ cifre}} + a$ să fie pătrat perfect pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

28. Demonstrați că pentru orice $m, n \in \mathbb{N}^*$ există $a, b \in \mathbb{Z}^*$ astfel încât $5^n + 5^{n+2m} = a^2 + b^2$.

29. Determinați $a, b \in \mathbb{N}^*$, știind că dacă $x, y \in [a, b]$ avem $x + y + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \in [a + 3, b + 3]$.

30. Determinați $x, y \in \mathbb{Z}$, astfel încât să avem $|x + 2y - 3| + |x - 2y + 2| \leq 1$.

31. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, astfel încât $ad + 1 > 0$, $bc + 1 > 0$. Determinați $B = abcd$, știind că $A = \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac - bd)^2} \leq 2$.

LIBRIS We know books

32. Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$ și $A = \sqrt{2^{a+b+c} - 2^{a+b} - 2^{b+c} - 2^{a+c} + 2^a + 2^b + 2^c - 1}$. Determinați condițiile în care $A \in \mathbb{N}$.

33. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ și fie $A = a\sqrt{\sqrt{3}+1} + b\sqrt{\sqrt{3}-1} + c\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+3}{2}} + d\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}$. Determinați condițiile în care $A \in \mathbb{N}$.

34. Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$ cu $a \neq 0$, $c \neq 0$ astfel încât $\dfrac{a}{c} = \dfrac{a^2+b^2}{b^2+c^2}$. Fie $A = a^2 + b^2 + c^2$. În ce condiții A este număr prim dacă $|a| \leq 9$, $|b| \leq 9$, $|c| \leq 9$?

35. Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există $a, b \in \mathbb{Z}^*$, astfel încât $48^n = a^2 - b^2$.

36. Determinați pătratele perfecte care sunt egale cu produsul a patru numere întregi consecutive impare.

37. Determinați suma pătratelor elementelor mulțimii $A \cup B$, unde:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} \in \mathbb{Z} \right\},\ B = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

38. Determinați $n \in \mathbb{Z}$, știind că $\dfrac{n^4+1}{n^2+n\sqrt{2}+1} \leq 10 - 3\sqrt{2}$.

39. Determinați valorile lui $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care doar primele trei zecimale ale numărului $\sqrt{n^2+4n+2}$ sunt egale cu 0.

40. Fie $n \in \mathbb{N}^*$, n număr de două cifre și fie $s(n)$ suma cifrelor lui n. Determinați $\left\{ \dfrac{n}{s(n)} \,\middle|\, 10 \leq n \leq 99 \right\} \cap \mathbb{N}$.

41. Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$ și fie $P = (a \cdot |bc| - bc \cdot |a|)(b \cdot |ac| - ac \cdot |b|)(c \cdot |ab| - ab \cdot |c|)$. Determinați tripletele (a, b, c) pentru care $0 < P < 128$.

42. Determinați numerele naturale pentru care diferența pătratelor numărului și răsturnatului său este un număr de 4 cifre.

43. Determinați numerele $a, b \in \mathbb{R}^*$ pentru care avem $\dfrac{a+1}{b+1} + \dfrac{a+2}{b+2} + \dfrac{a+3}{b+3} + \dfrac{a+4}{b+4} = 5 \cdot \dfrac{a}{b}$ și $a^2 + b^2 \leq 1$.

44. Determinați $n \in \mathbb{N}$ pentru care $\sqrt{n+25} + \sqrt{n+601} \in \mathbb{Q}$.

45. Determinați $m, n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $n(n+2)(n+4) = m^6$.

46. Determinați mulțimea $A = \left\{ \overline{abc} \,\middle|\, \sqrt{a} + \sqrt{a+b} = c \right\}$.